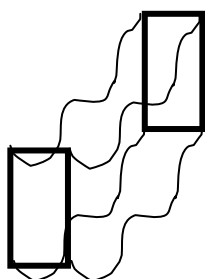


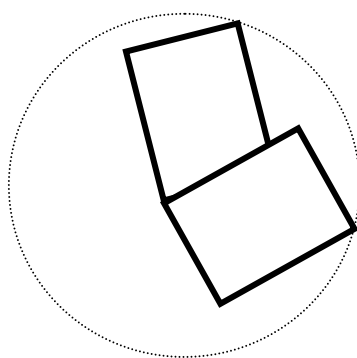
MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA

1. Základní teze

- **tuhé těleso** – ideální těleso, které nemůže být deformováno působením žádné (libovolně velké) vnější síly
- **druhy pohybu tuhého tělesa**
 - a) translace (posuvný pohyb) – všechny body tělesa opisují stejné trajektorie
 - b) rotace (otáčivý pohyb) – všechny body tělesa se pohybují po kružnicích, které musí mít své středy na téže ose = osa rotace
 - c) složený pohyb – z předešlých dvou

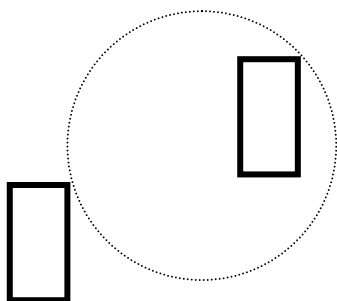


a)



b)

O který druh pohybu jde v následujícím příkladu?



2. Skládání sil

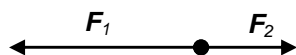
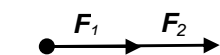
znamená nahradit dvě (nebo více) sil jedinou silou (jejich výslednicí), která má na těleso stejné účinky jako skládané síly.

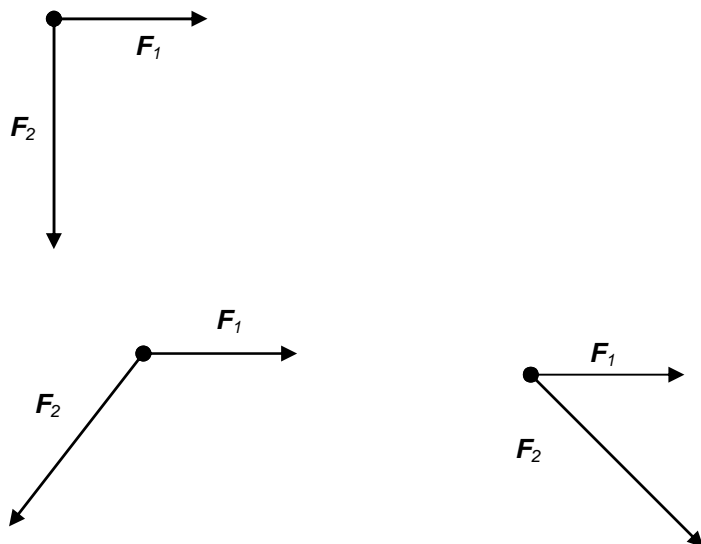
a) síly působící v jednom bodě (působišti) \approx jako kdyby působily na hmotný bod

výslednice graficky

její velikost

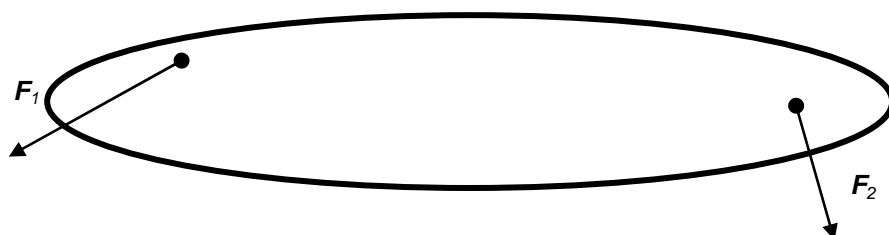
její směr

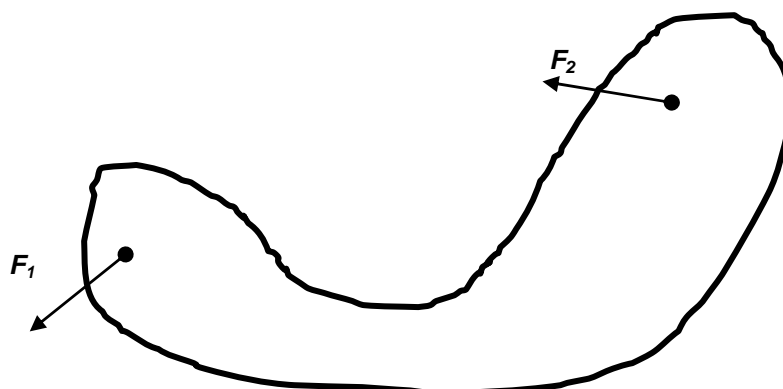




b) síly mají různá působišťe

i) různoběžné vektorové přímky



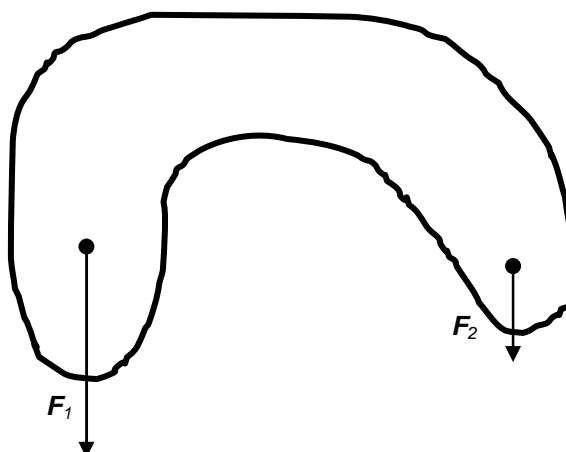


Pokud vektorová přímka výslednice neprotíná těleso, síly nemohou být touto výslednicí nahrazeny.

ii) rovnoběžné vektorové přímky

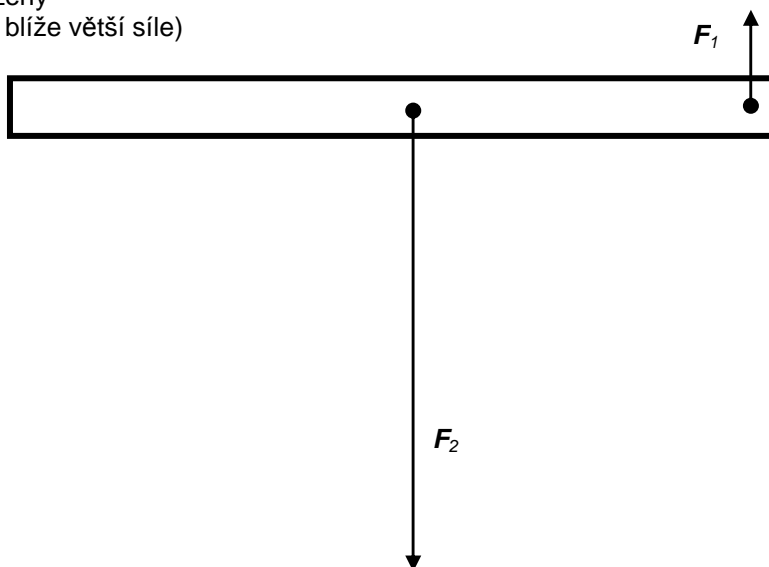
stejného směru

- je vždy možné najít výslednici
(výslednice leží „mezi“ působišti)



opačného směru

- pokud vektorová přímka výslednice neprochází tělesem,
síly nemohou být touto výslednicí nahrazeny
(výslednice leží „vně“ spojnice působišť, blíže větší síle)



velikost a směr výslednice: jako kdyby síly působily z jednoho bodu

působíště výslednice – problém, výpočty později – nyní jen:

graficky:

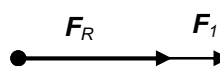
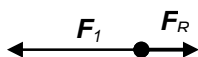
zaměníme síly a změníme směr JEDNÉ z nich $\Rightarrow F_1' F_2'$ (pomocné vektory)

- průsečík přímky spojující působíště sil F_1 a F_2 a přímky spojující koncové body vektorů $F_1' F_2' =$ působíště výsledné síly

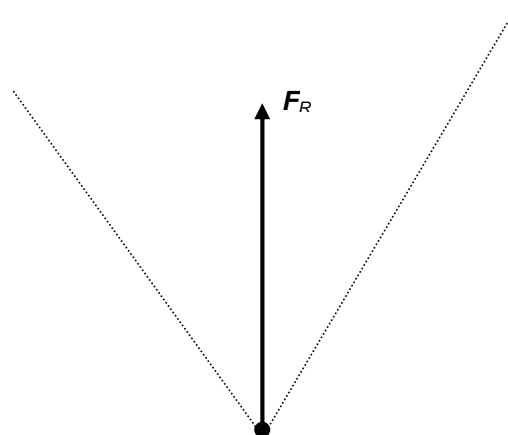
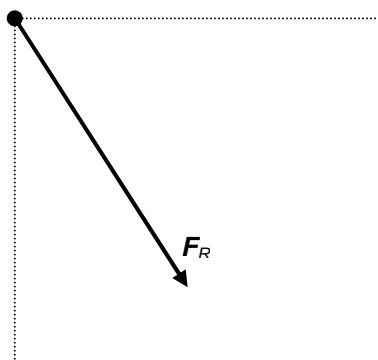
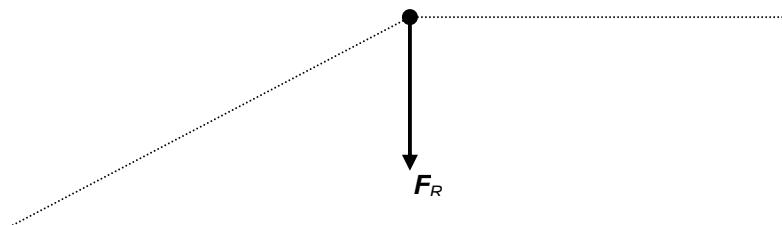
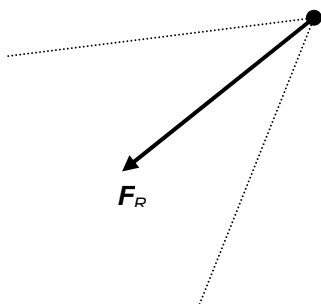
3. Rozklad sil

znamená nalézt složky výsledné síly (užívá se např. pro tělesa na nakloněné rovině k nalezení normálové složky tíhové síly pro tření a kinetické složky rovnoběžné s nakloněnou rovinou)

určete složku F_2 výsledné síly F_R



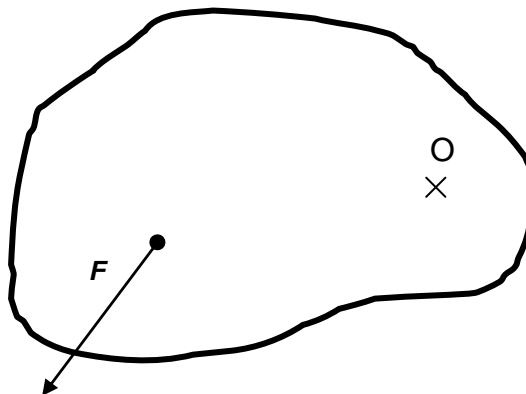
určete složky F_1 a F_2 v daných směrech



4. Moment síly (\vec{M})

je vektorová veličina vyjadřující otáčivý účinek síly působící na těleso.

velikost: $M = F \cdot r$



směr vektoru \mathbf{M} : pravidlo pravé ruky

položíme-li pravou ruku na těleso tak, aby zahnuté prsty ukazovaly směr otáčení tělesa, pak vztyčený palec ukazuje směr momentu síly

$[M] = \text{N} \cdot \text{m}$ (newtonmetr, ne joule !!!)

5. Výsledný moment více sil působících na těleso

2 metody, každá vhodná pro jinou situaci:

- slož síly a pak urči moment výsledné síly

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}_R$$

$$M = F_R r$$

- urči momenty všech sil a pak je slož jako vektory

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \vec{M}_R$$

L2/ 261-3, 265-6, x267-8, 269-270, 273-275, x283-4

Příklady:

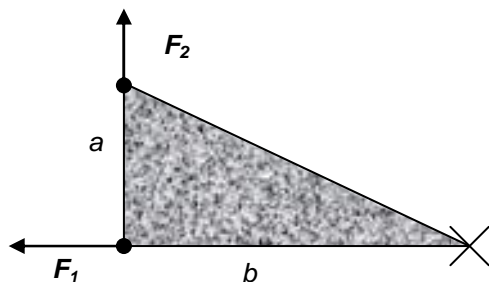
1.

$$F_1 = 5 \text{ N}$$

$$F_2 = 4 \text{ N}$$

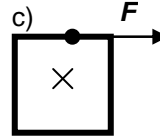
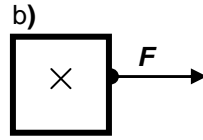
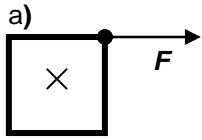
$$a = 5 \text{ cm}$$

$$b = 7 \text{ cm}$$



Vypočítej výslednou sílu a moment a urči směr těchto vektorů.

2. $F = 4 \text{ N}$, $a = 20 \text{ cm}$, $\vec{M} = ?$



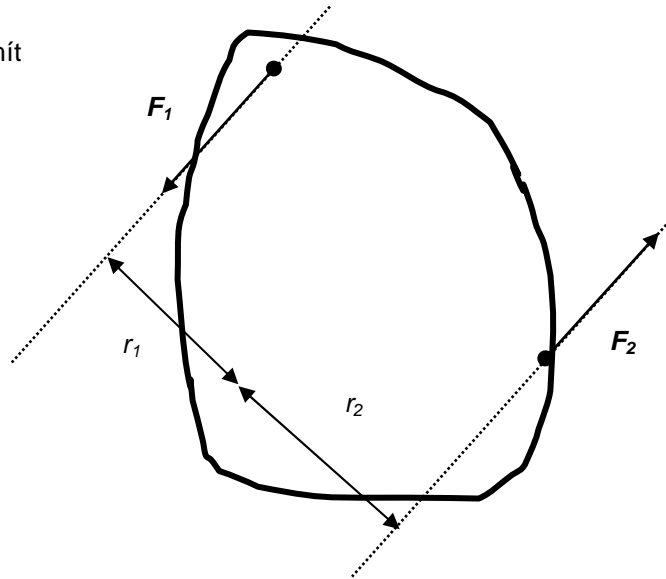
6. Dvojice sil

zvláštní případ sil působících na těleso; síly musí mít

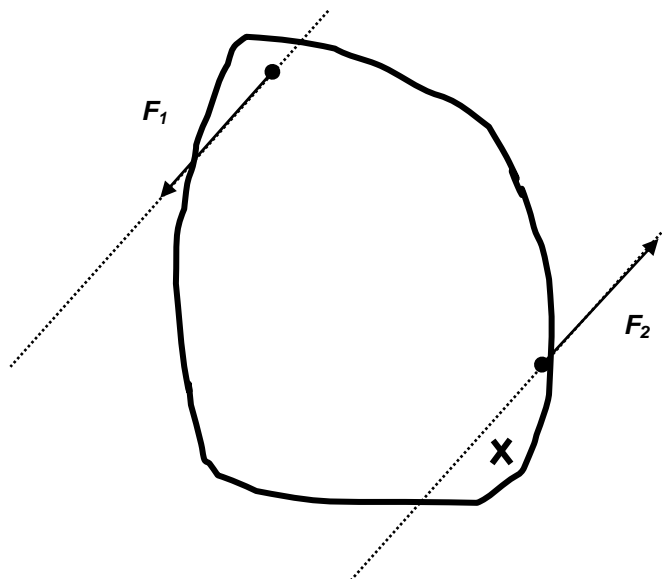
- stejnou velikost $F_1 = F_2$
- opačný směr
- rovnoběžné vektorové přímky

velikost $M_R = D$

$$D = M_1 + M_2 = F_1 r_1 + F_2 r_2 = F_1(r_1 + r_2) = F_1 d$$



Odvod' rovnici pro D pro novou polohu osy:

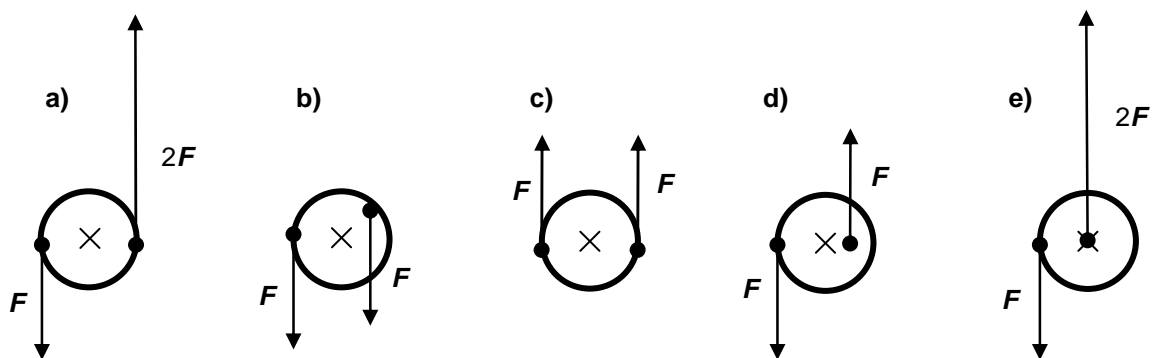


⇒ dvojice sil

- nemůže být nahrazena výslednicí
- její moment NEZÁVISÍ na poloze osy

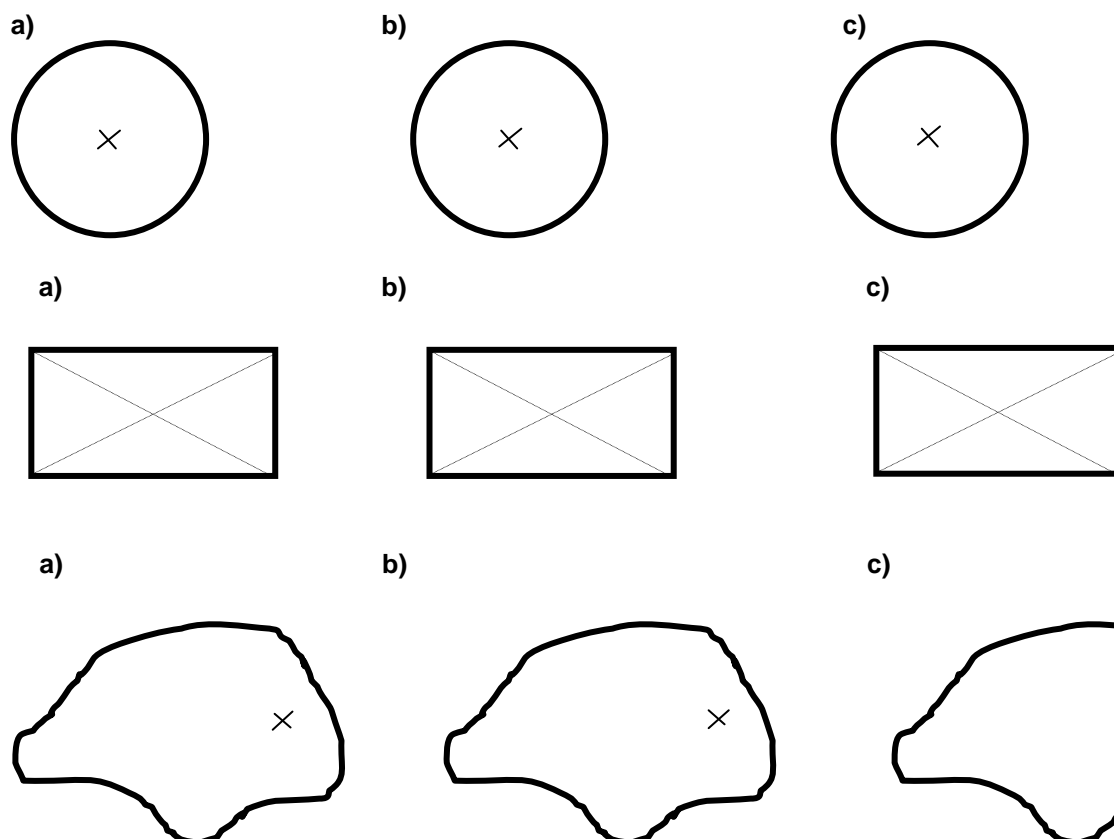
Příklady:

3. Který z následujících příkladů reprezentuje dvojici sil? Seřad' obrázky podle rostoucího momentu.



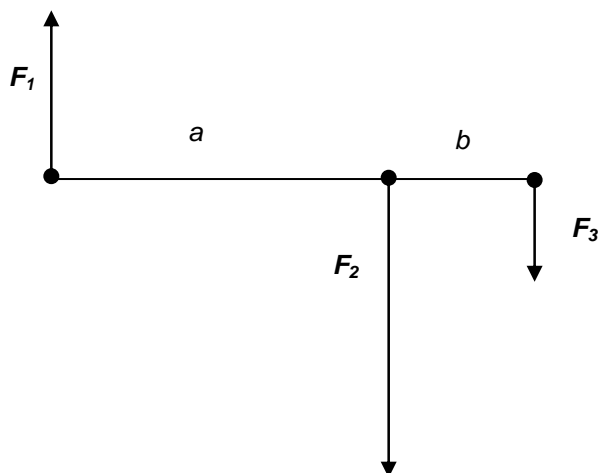
4. Narýsuj sílu o velikosti 5 N, která má

- nulový otáčivý účinek
- maximální otáčivý účinek
- dvojici sil s maximálním otáčivým účinkem



L2/273 Urči výslednici třech sil na obrázku:

$a = 0,6 \text{ m}$
 $b = 0,3 \text{ m}$
 $F_1 = 50 \text{ N}$
 $F_2 = 80 \text{ N}$
 $F_3 = 30 \text{ N}$



Podobné situace mohou být řešeny využitím otáčivého účinku sil, ačkoliv zde ve skutečnosti není žádná osa ani rotace!!! Jestliže nahradíme síly jejich výslednicí, nic se nemůže změnit. Takže otáčivý účinek, tj. moment výsledné síly vzhledem k libovolné ose rotace musí být stejný jako vektorový součet momentů jednotlivých sil.

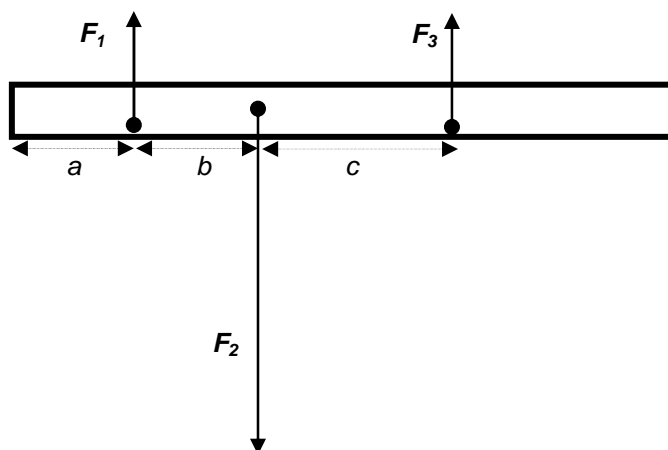
Tato metoda v praxi:

- vyber osu rotace
- může být v libovolném bodě, výhodné je vybrat působíště jedné ze sil, tudíž její moment je roven nule
- vypočítej velikost výslednice
- vyber kladný směr od osy a kladný směr momentů
- napiš rovnici: moment výslednice = součtu momentů sil vzhledem ke zvolené ose
nezapomeň na znaménka momentů + nebo – (pokud by síla otáčela tělesem v opačném směru než výslednice)
- napiš jasně výsledek = jaká je vzdálenost z levé/pravé strany předmětu v odpovídajících jednotkách nebo nakresli jednoduchý obrázek
- pro kontrolu – vyber jinou osu; bod působíště výsledné síly musí být ve stejném bodě, i když „d“ se bude lišit.

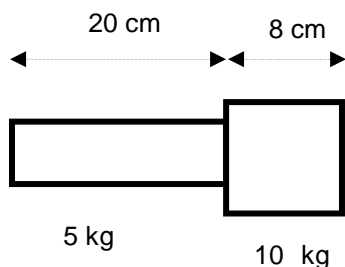
Příklady:

5. Urči velikost a působíště výslednice vzhledem k LEVÉMU konci předmětu.

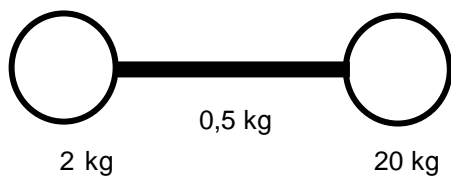
$l = 2 \text{ m}$ (celková délka předmětu)
 $a = 0,4 \text{ m}$
 $b = 0,4 \text{ m}$
 $c = 0,6 \text{ m}$
 $F_1 = 10 \text{ N}$
 $F_2 = 30 \text{ N}$
 $F_3 = 10 \text{ N}$



6. Urči velikost a vzdálenost působíště výslednice od PRAVÉHO konce tělesa. (těžiště tělesa)



7. Urči těžiště tělesa.



průměr koulí je 20 cm
délka spojovací tyče je 40 cm

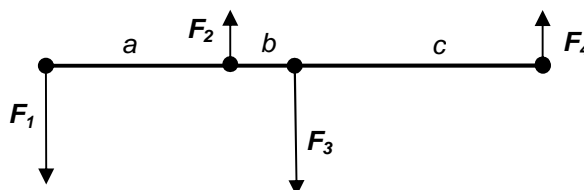
8. Urči velikost a působíště výslednice soustavy čtyř rovnoběžných sil.

$$F_1 = 40 \text{ N} \quad a = 0,7 \text{ m}$$

$$F_2 = 25 \text{ N} \quad b = 0,2 \text{ m}$$

$$F_3 = 45 \text{ N} \quad c = 0,9 \text{ m}$$

$$F_4 = 25 \text{ N}$$



7. Rovnovážná poloha a stabilita

- Podmínky rovnováhy:

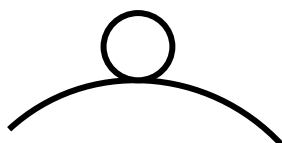
výslednice sil i výsledný moment sil musí být nulové.

- Druhy rovnovážných poloh

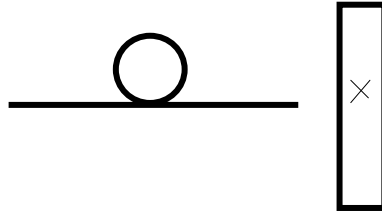
a) stálá (stabilní)



b) vratká (labilní)



c) volná (indiferentní)



- Mírou stability tělesa je práce, kterou musíme vykonat, abychom těleso přemístili ze stále rovnovážné polohy do vratké.

Příklady:

9. Jakou práci musíme vykonat, abychom převrátili hranol kolem jeho hrany ze stálé rovnovážné polohy do vratké? Hranol stojí na čtvercové stěně o straně $a = 30$ cm, výška hranolu je $h = 40$ cm a hustota hranolu je $\rho = 2500$ kg·m⁻³. Předpokládejte $g = 10$ m·s⁻².

10. Určete, zda je výhodnější převracet krychli nebo ji tlačit, pokud uvažujeme koeficient tření 0,3.

L2/279-282

8. Kinetická energie rotujících těles

Roztočit těleso, které je v klidu, vyžaduje určitou energii (je potřeba síly působící po určité dráze – koná se mechanická práce), a totéž se děje při zastavování rotujícího tělesa. Tato energie závisí na:

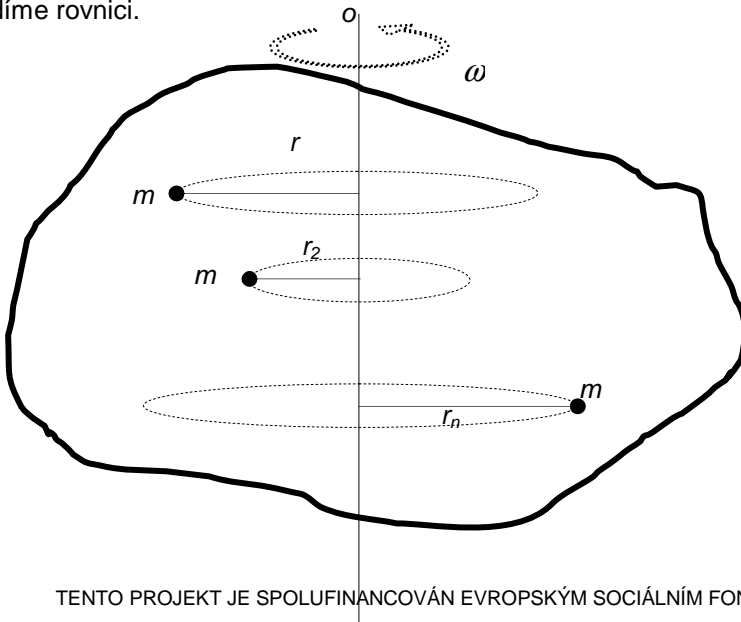
- ω (úhlová rychlost)
- hmotnost tělesa a také na rozložení látky v tělese vzhledem k ose rotace

Na důkaz uveď příklady z každodenního života:

Uveď vztah mezi ω a v : $v =$

Jedno těleso může mít kinetickou energii posuvného pohybu ($= \frac{1}{2}mv^2$) a zároveň kinetickou energii rotačního pohybu.

Odvodíme rovnici.



$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + \dots + E_{kn} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} (m_1 \omega^2 r_1^2 + m_2 \omega^2 r_2^2 + \dots + m_n \omega^2 r_n^2) = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) = \frac{1}{2} J \omega^2$$

J ... moment setrvačnosti

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

$$[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

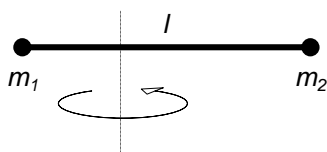
- závisí na hmotnosti tělesa a na poloze osy rotace – více hodnot pro libovolné těleso
- takto může být vypočítán, když je těleso tvořeno konečným počtem částí hmoty (např. 3-4)
- pro tělesa pravidelných tvarů – hodnoty v tabulce

tvar	J	osa
plná koule	$\frac{2}{5} mr^2$	procházející středem
prázdná koule	$\frac{2}{3} mr^2$	procházející středem
válec	$\frac{1}{2} mr^2$	procházející středy podstav
disk	$\frac{1}{2} mr^2$	procházející středy podstav
prstenec	mr^2	procházející středem
homogenní tyč	$\frac{1}{12} mr^2$	procházející těžištěm

Použití: setrvačnick (např. v motorech aut, lokomotiv, lodí, dětských hračkách)

Příklady:

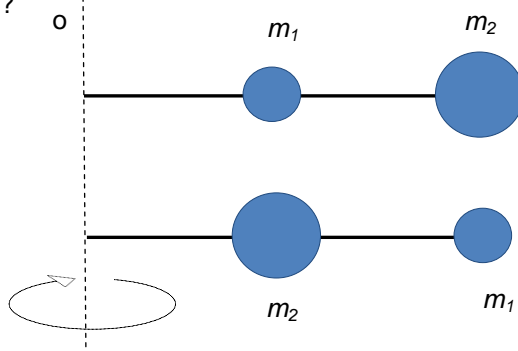
11. Zanedbejte hmotnost tyče spojující malé koule (hmotné body) a vypočítejte moment setrvačnosti a kinetickou energii rotačního pohybu, jestliže tyč rotuje úhlovou rychlostí $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, osa je kolmá na tyč a
- prochází těžištěm soustavy
 - prochází středem tyče.



$$\begin{aligned} m_1 &= 0,3 \text{ kg} \\ l &= 0,8 \text{ m} \\ m_2 &= 0,1 \text{ kg} \\ \omega &= 10 \text{ rad s}^{-1} \end{aligned}$$

12. Rotor elektromotoru má moment setrvačnosti $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ a koná 50 otáček za sekundu. Vypočítej jeho kinetickou energii.
13. Vypočítej kinetickou energii plného stejnorodého válce o hmotnosti 5 kg a poloměru 0,2 m, jestliže provádí
- posuvný pohyb rychlostí $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 - rotaci tak, že se body na jeho povrchu pohybují rychlostí $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 - valivý pohyb rychlostí $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
14. Prázdná i plná koule mají stejný poloměr a hmotnost. Která z nich má větší moment setrvačnosti? Kterou z nich je obtížnější roztočit?

15. Uvažujte dvě tyče zanedbatelných hmotností, se dvěma koulemi o hmotnostech m_1 and m_2 , $m_1 = 210$ g, $m_2 = 420$ g. Délka tyče je $l = 140$ cm a vnitřní koule je umístěna ve středu tyče. Určete momenty setrvačnosti obou tyčí vzhledem k ose o, která je k nim kolmá a prochází konci obou tyčí. Která z nich by měla větší kinetickou energii, kdyby se otáčely se stejnou úhlovou rychlostí?



16. Určete kinetickou energii disku rotujícího kolem osy s frekvencí 400 otáček za minutu. Hmotnost disku je $m = 900$ g, poloměr $r = 50$ cm.

L2/285-290, x291-3, 294-298

Výsledky:

1. 6,4 N; 0,28 Nm do nákrasny
2. a) 0,4 Nm; b) 0; c) 0,4 Nm
3. d; c, b, e, d, a
5. 0,6 m
6. 8,7 cm
7. 64 cm zleva
8. 2,43 m nalevo od F_4
9. 45 J
10. otočit
11. $0,048 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 2,4 J; $0,064 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 3,2 J
12. 59,2 kJ
13. a) 90 J; b) 45 J; c) 135 J
15. $0,926 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $0,617 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
16. 100 J