

# KMITÁNÍ MECHANICKÉHO OSCILÁTORU

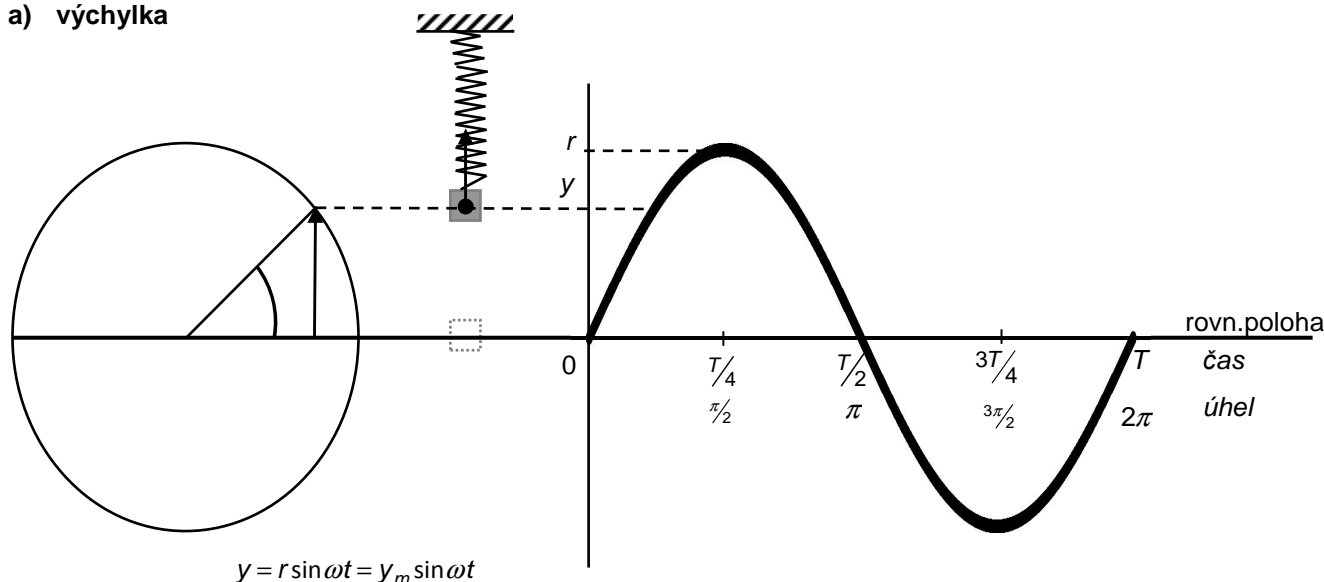
## 1. Periodický pohyb, kinematika harmonického kmitání

- pohyb – přímočarý, po kružnici, „tam a zpět“ – vibrace, kmitání, oscilace
- kmitání může být nepravidelné, my se ale budeme zabývat jen pravidelným kmitáním, kterému říkáme HARMONICKÉ. Takové kmitání je možno popsat pomocí veličin vhodného rovnoměrného pohybu po kružnici ( $r = y_{\max}, T$ )  
vyjádřit pomocí rovnice:  $a = -ky$   
zrychlení a výchylka od rovnovážné polohy v témže okamžiku

## 2. Veličiny popisující harmonické kmitání, fázorový diagram

<http://fyzika.jreichl.com/index.php?sekce=browse&page=156>

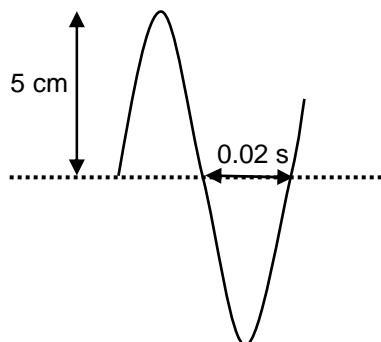
### a) výchylka



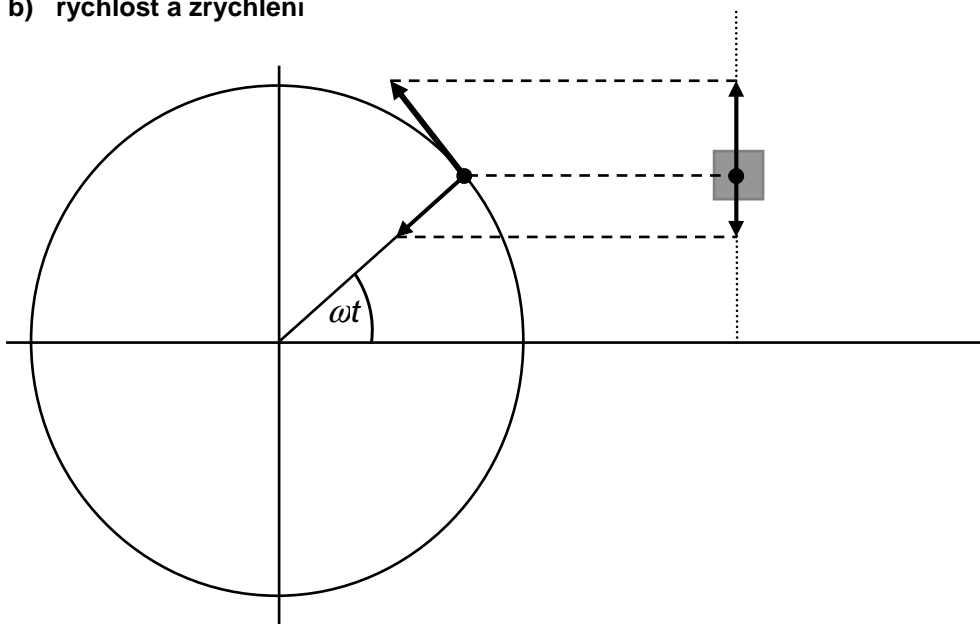
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

### Otázky:

1. Závaží upevněné na pružině kmitá harmonicky s periodou 2 sekundy. Předpokládejte amplitudu výchylky 10 cm a počátek měření v okamžiku, kdy těleso prochází rovnovážnou polohou směrem nahoru; určete okamžitou výchylku tělesa za jednu sekundu a 23 sekund.
2. Napište rovnici  $y = f(t)$



## b) rychlost a zrychlení



rychlost a zrychlení tělesa vykonávajícího harmonické kmity jsou projekcí obdobných veličin popisujících „vhodný“ rovnoměrný pohyb po kružnici

$$v = v_0 \cos \omega t = \omega r \cos \omega t = \omega y_m \cos \omega t$$

velikost  $a = a_c \sin \omega t = \omega^2 r \sin \omega t = \omega^2 y_m \sin \omega t$ , ale má opačný směr než výchylka – takže výsledně

$$a = -\omega^2 y_m \sin \omega t = -\omega^2 y$$

Rovnice můžeme odvodit jako první a druhou derivaci výchylky podle času

$$v = y' = \frac{dy}{dt} =$$

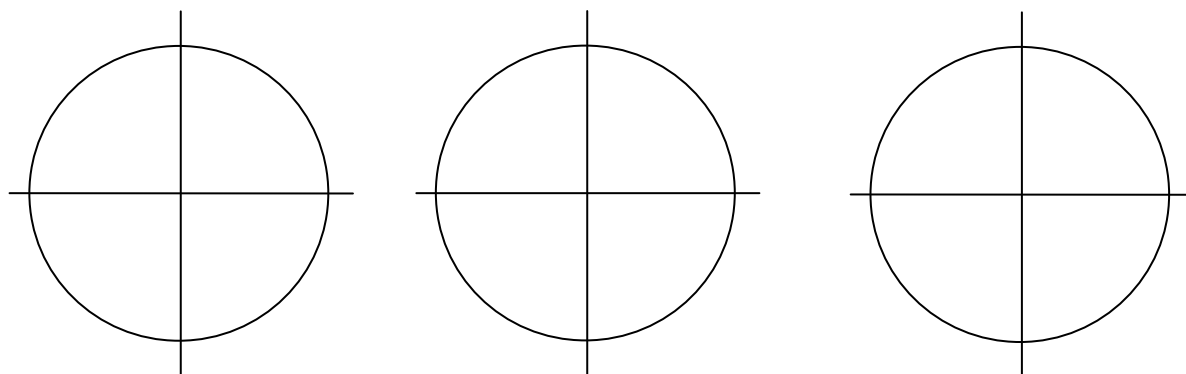
$$a = v' = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} =$$

výhoda – jednoduché, znaménka +/- získáme přímo derivací

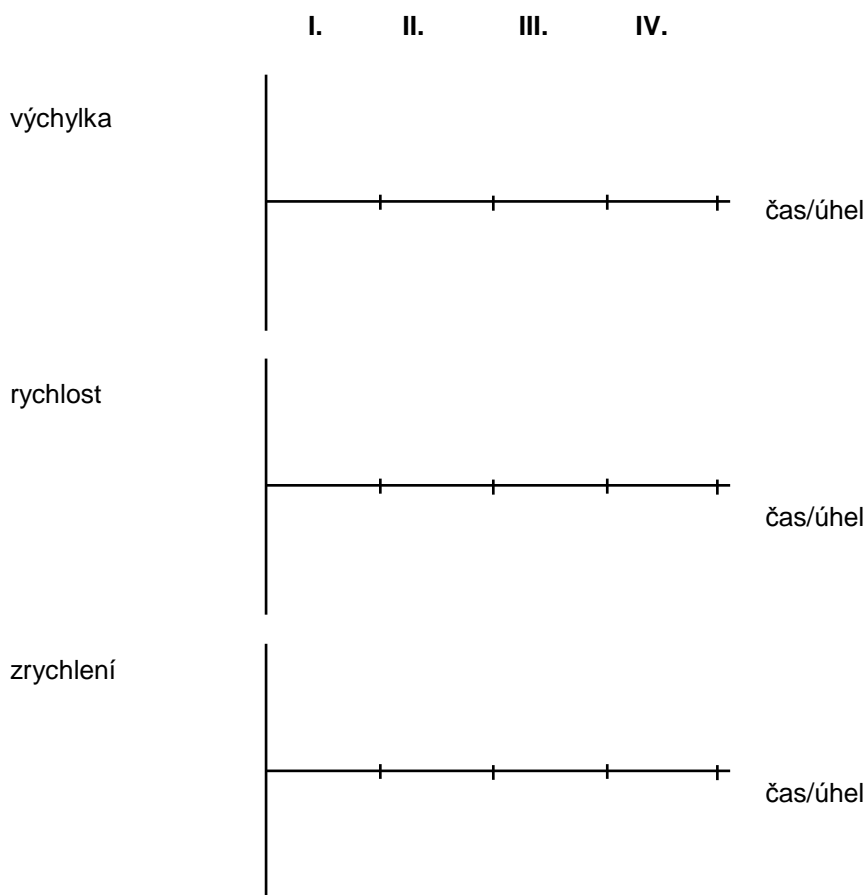
nevýhoda – „pouze matematicky“, ne každý vidí spojení s reálným pohybem

### Otázky:

3. Srovnajte s první rovnicí definující harmonické kmity, diskutujte.
4. Nakreslete podobné obrázky pro II. – IV. kvadrant, srovnajte směr rychlosti a směr pohybu tělesa. Ze směru rychlosti a zrychlení stanovte, je-li pohyb zpomalený nebo zrychlený. Najděte místa s největší hodnotou rychlosti (zrychlení) a nulovou hodnotou stejných veličin.

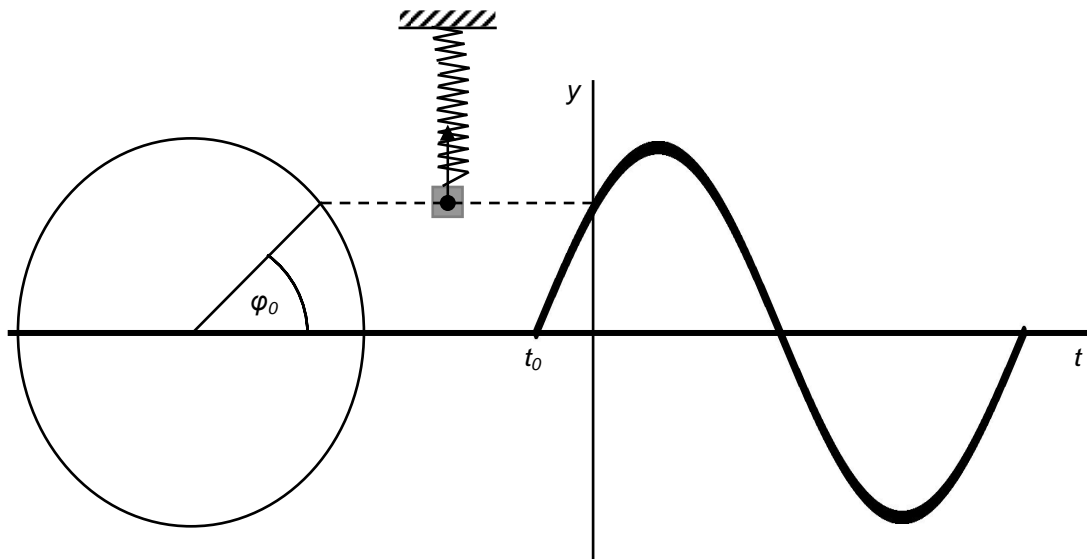


c)  $y-t$ ,  $v-t$ ,  $a-t$  grafy



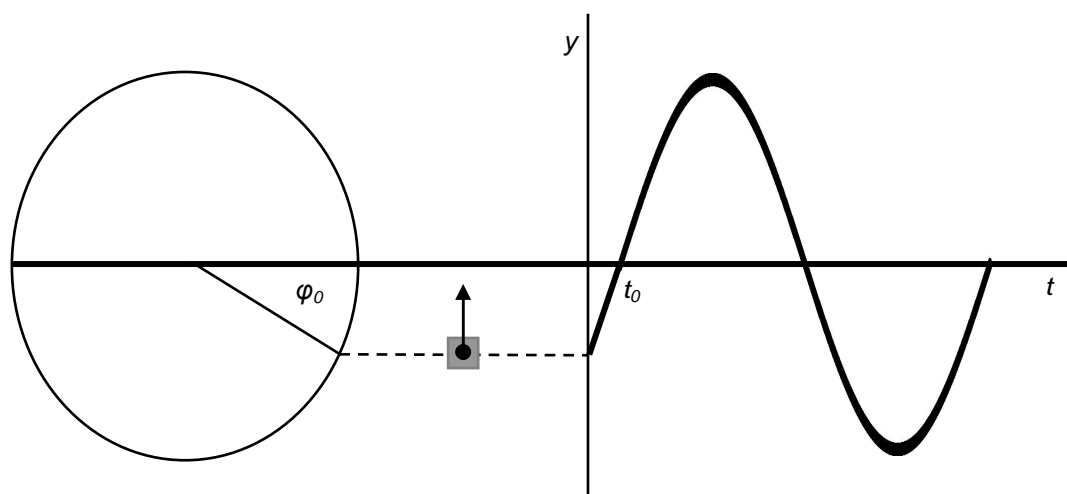
### 3. Počáteční fáze

- důležitá veličina, když nezačneme měřit čas v okamžiku, kdy těleso prochází rovnovážnou polohou „nahoru“
- příslušný úhel/čas musíme přičíst nebo odečíst, abychom získali kompletní sinusoidu nebo kosinusoidu



$$\varphi_0 = \omega t_0 \quad y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad v = \quad a =$$

je-li úhel od  $\pi$  do  $2\pi$ , počáteční fázi můžeme odečíst:



$$y = y_m \sin(\omega t - \varphi_0) \quad v = \quad a =$$

#### Otázky:

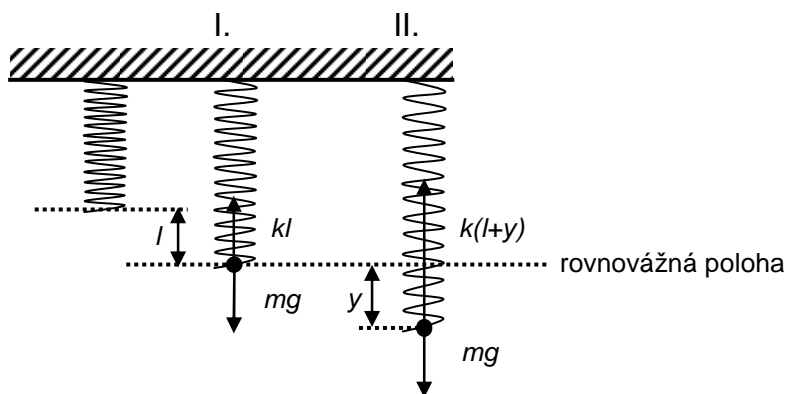
5. Určete počáteční fázi, když:
- $t_0 = 0.5 \text{ s}$ ,  $T = 4 \text{ s}$
  - $t_0 = 0.1 \text{ s}$ ,  $T = 2 \text{ s}$

L4/1-14, X15, 16-23

## 4. Mechanický oscilátor

- pružiny se chovají podle Hookova zákona
- $k$  ... tuhost pružiny = síla, která způsobí její jednotkové prodloužení (=1m)

$$k = \frac{F}{l} \quad [k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}^{-1}$$



$$\text{I.} \quad \begin{aligned} F_V &= 0 \\ F_P &= F_G \\ kl &= mg \end{aligned}$$

$$\text{II.} \quad \begin{aligned} F_V &\neq 0 \\ F_V &= F_P - F_G \\ F_V &= k(l+y) - mg = kl + ky - kl = ky \end{aligned}$$

Výsledná síla způsobí zrychlení podle 2. pohybového zákona

velikosti:  $ma = ky$ , ale zrychlení a výchylka mají opačný směr, takže:

$$\begin{aligned} ma &= -ky \\ a &= -\frac{k}{m}y \end{aligned}$$

srovnajte:  $a = -\omega^2 y$  a odtud

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{vezměte} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{nebo} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$T, f$  ... vlastní perioda, frekvence

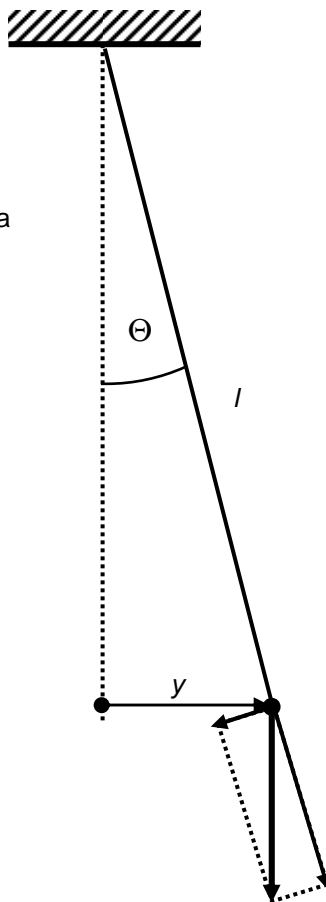
### Otázky:

6. Na lehkou spirálovou pružinu zavěsíme závaží o hmotnosti 50 g a dojde k jejímu prodloužení o 10 cm. Uvažujte amplitudu výchylky 5 cm, nulovou počáteční fázi a vypočítejte:
- periodu malých kmitů ve svislé rovině
  - rychlost v rovnovážné poloze
  - zrychlení 2 cm nad rovnovážnou polohou
  - za jak dlouho se závaží dostane 2 cm nad rovnovážnou polohou

## 5. Matematické kyvadlo

- drobné těleso o hmotnosti  $m$  zavěšené na velmi lehké neelastické vlákno délky  $l$  z pevného bodu
- pouze pro malé úhly (méně než 5 stupňů), kdy můžeme kmitání považovat za přímočarý pohyb
- tíha tělesa ...  $mg$   
 $mg \cos \Theta$  ... její „tahová“ složka – vyrovnaná silou vlákna  
 $mg \sin \Theta$  ... její tečná složka – vrací těleso k rovnovážné poloze, není vyrovnaná – 2. pohybový zákon!

Najděte tyto síly v následujícím obrázku:



$$mg \sin \Theta = ma$$

$$mg \frac{y}{l} = ma$$

$$a = \frac{g}{l} y$$

pro velikosti, ale zrychlení a výchylka mají opačný směr, takže:

$$a = -\frac{g}{l} y$$

srovnejte:

$$a = -\omega^2 y \quad \text{a odtud}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\text{vezměte} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{nebo} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$T, f$  ... vlastní perioda, frekvence

### Otázky:

7. Vysvětlete proč perioda matematického kyvadla nezáleží na hmotnosti. Dokažte!
8. Kulička o hmotnosti 40 g visí na 50 cm dlouhé struně. Pak ji strčíme a začne kmitat s amplitudou výchylky 2 cm. Pokud začneme měřit čas, když je nejdál od rovnovážné polohy, spočítejte:
  - a) frekvenci kmitání
  - b) za jak dlouho se dostane do rovnovážné polohy
  - c) při jaké výchylce je okamžitá rychlost právě polovina maximální rychlosti
  - d) načrtněte graf závislosti výchylky na čase

## 6. Dynamika harmonického kmitání

- harmonické kmitání je pohyb se zrychlením  $a = -\omega^2 y$
- zrychlení způsobuje výsledná síla působící na kmitající těleso (2. pohybový zákon)

$$F = ma = -m\omega^2 y \quad \text{roste spolu s výchylkou, ale má vždy směr k rovnovážné poloze!}$$

### Otázky:

9. Diskutujte  $F$  v obou předchozích příkladech harmonického kmitání
  - a) Které síly působí na mechanický oscilátor (matematické kyvadlo) a jaká je jejich výslednice?
  - b) Jaký je vztah mezi velikostí výslednice a výchylkou?
10. Podívejte se na všechny předchozí úlohy, a pokud máte dost informací, spočítejte největší výslednou sílu a sílu v daných výchylkách. Pokud to nelze, určete, které údaje vám chybí.

## 7. Energie oscilátorů

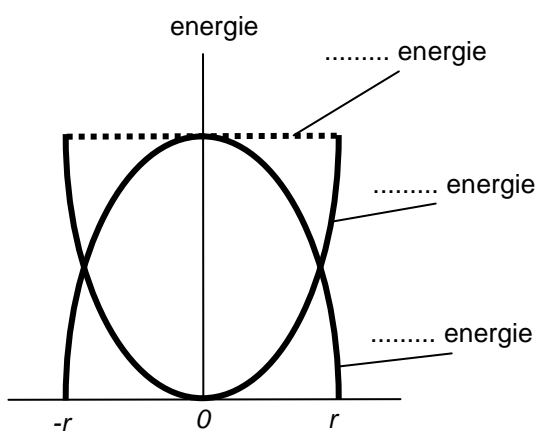
- předpokládejme vlastní - netlumené kmity, kde se mechanická energie nemění na jiné druhy
- celková mechanická energie zůstává stejná, pouze potenciální a kinetická energie se mohou měnit v souladu s následujícími rovnicí

$$E_{mech} = E_k + E_p$$

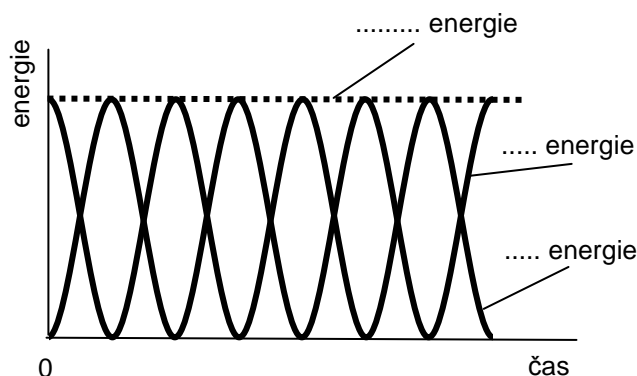
- v **rovnovážné poloze** – kinetická energie je.....(těleso má největší rychlost), potenciální energie je nula
- v **nejzdálenější poloze** – kinetická energie je..... (těleso se zastaví), potenciální energie je nejvyšší možná

$$E_{kmax} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = E_{pmax} = E_{mech}$$

graf závislosti energie na poloze



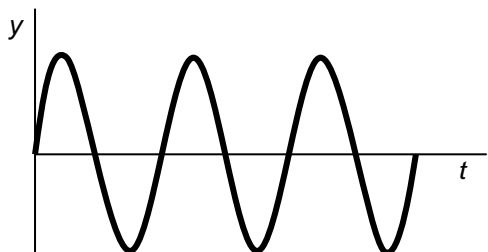
graf závislosti energie na čase



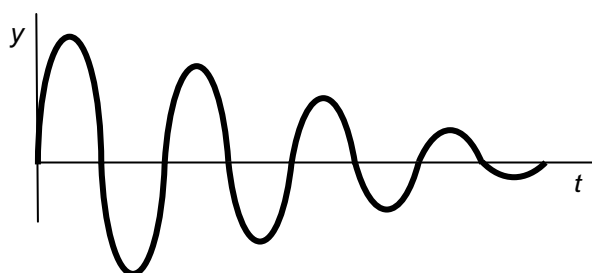
Na časové ose vyznačte násobky a díly periody (předpokládejte nulovou počáteční fázi)

## 8. Vlastní, tlumené a nucené kmitání, rezonance

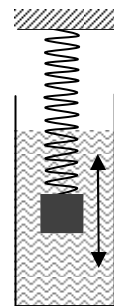
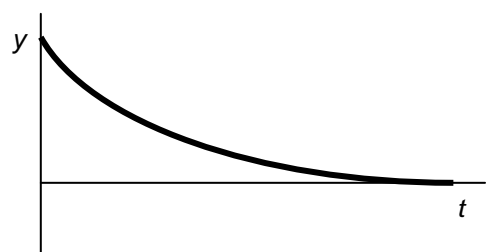
- **vlastní (netlumené) kmitání** – mechanická energie se zachovává – pouze ideální situace



- **tlumené kmitání** – mechanická energie se mění na jiné druhy – reálná situace
  - amplituda kmitání se postupně zmenšuje, PERIODA ZŮSTÁVÁ STEJNÁ (viz rovnice)
    - <http://www.lon-capa.org/~mmp/applist/damped/d.htm>
    - <http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos/SHO/damp.html>
  - lehké tlumení – matematické kyvadlo ve vzduchu

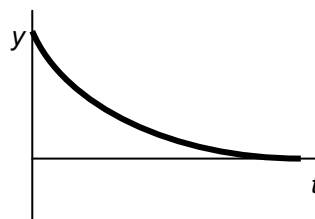


- silné tlumení – nekmitá, těleso se pouze vrátí do rovnovážné polohy



- kritické tlumení = silné v nejkratším možném čase  $T/4$  – tlumiče

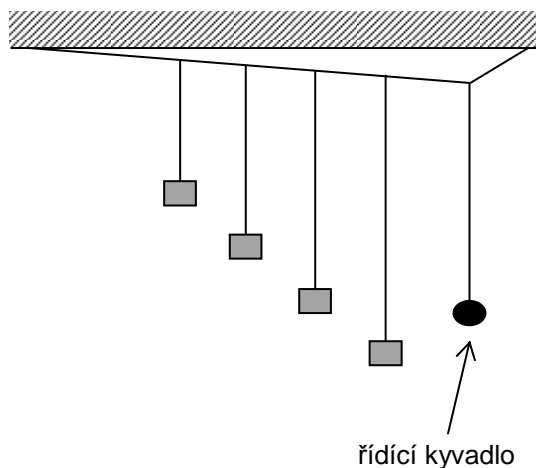
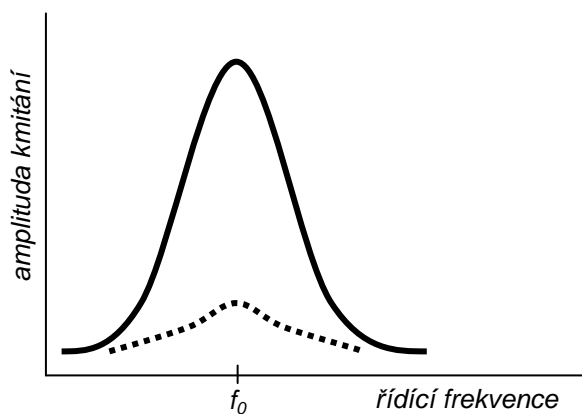
[http://en.wikipedia.org/wiki/Shock\\_absorber](http://en.wikipedia.org/wiki/Shock_absorber)  
<http://auto.howstuffworks.com/car-suspension2.htm>





- **nucené kmitání** – reálná situace, kdy se vnější silou snažíme udržet kmitání

např. houpačka nebo Bartonova kyvadla – velikost působící síly není jedinou důležitou veličinou, síla musí působit ve vhodných časových intervalech (řídící frekvence) aby práce byla minimální (min. energie je třeba k udržení kmitání) = **rezonance**



#### Otázky:

11. Podívejte se na všechny předchozí úlohy, a pokud máte dost informací, spočítejte celkovou mechanickou energii kmitajícího tělesa, největší kinetickou a největší potenciální energii. Předpokládejte vlastní kmitání. Pokud to nelze, určete, které údaje vám chybí.

L4/66

#### Odpovědi:

- a) 0 b) 0
- $0,05\sin(157t)$
- a)  $0,25 \text{ rad} = 45^\circ$  b)  $0,1 \text{ rad} = 18^\circ$
- a)  $0,63 \text{ s}$ ; b)  $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ; c)  $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ; d)  $0,04 \text{ s}$
- a)  $0,7 \text{ Hz}$ ; b)  $0,36 \text{ s}$ ; c)  $\pm 1,732 \text{ cm}$
6.  $0,25 \text{ N}$ ;  $0,1 \text{ N}$
8.  $15,5 \text{ mN}$ ;  $13,4 \text{ mN}$
6.  $6,25 \text{ mJ}$
8.  $0,15 \text{ mJ}$