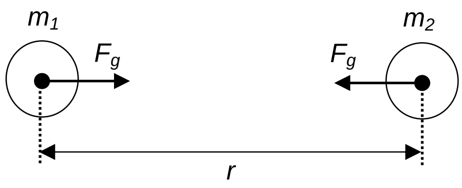
GRAVITAČNÍ POLE

1. Newtonův gravitační zákon

(1687 Newton v díle Matematické principy přírodní filozofie)

Každá dvě hmotná tělesa na sebe navzájem působí stejně velkými, opačně orientovanými silami. Velikost těchto sil je přímo úměrná jejich hmotnostem a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti.



$$F_g \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

κ ... Newtonova gravitační konstanta (stanovená Cavendishem později)

velikost vzájemného gravitačního působení

$\kappa = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$

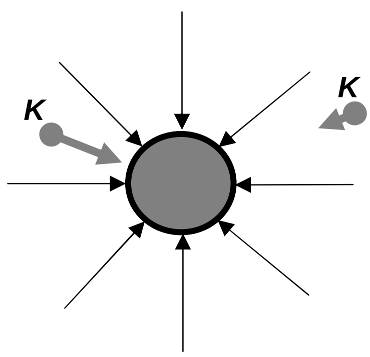
Otázky:

1. Jaká gravitační síla působí mezi Zemí a Měsícem?

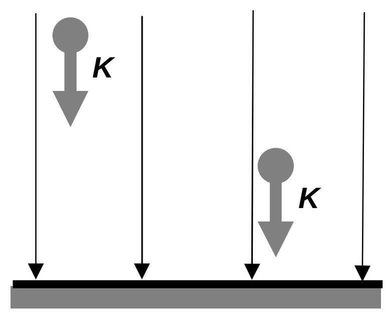
2. Gravitační síla mezi dvěma tělesy je $2\cdot10^{-5}$ N. Jaká bude síla mezi tělesy:
   a) když se jejich vzdálenost zdvojnásobí
   b) když bude hmotnost těles dvojnásobná

- typy gravitačních polí

centrální



homogenní (stejnorodé)



Diskutujte o problémech jednotlivých typů.

Centrální (radiální) pole je gravitační. **Gravitační síla F_g** působící na těleso v různých místech tohoto pole je různá. Homogenní pole v okolí Země nazýváme tíhové. **Tíhová síla F_G** přitahující těleso k Zemi je ve všech místech tohoto pole stejná (proč?).

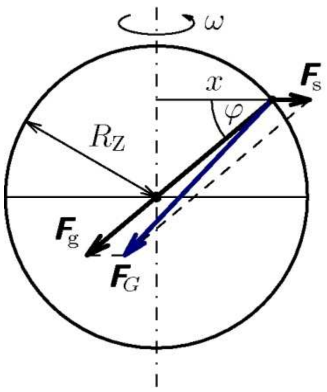
TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

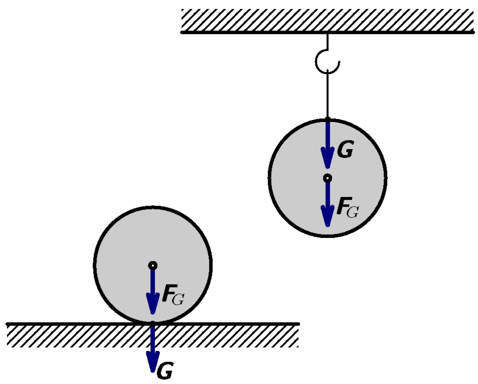
Ve všech místech gravitačního pole Země směřuje gravitační síla $\boldsymbol{F_g}$ ($\boldsymbol{a_g}$ i $\boldsymbol{K}$) do středu Země. Takové pole se nazývá **centrální gravitační pole.** Gravitační síla $\boldsymbol{F_g}$ působící na těleso v různých místech tohoto pole je různá. Centrální gravitační pole je v okolí každého stejnorodého tělesa, které má tvar koule (i v okolí hmotného bodu). Centrální gravitační pole je prostorově neohraničené.

Sledujeme-li účinky gravitační síly v malých oblastech gravitačního pole Země (např. při povrchu Země v rozmezí několik set metrů), zjistíme, že se v jednotlivých bodech gravitační síly $\boldsymbol{F_g}$ ($\boldsymbol{a_g}$ i $\boldsymbol{K}$) odlišují jen nepatrně, a to co do velikosti, tak i co do směru. Takové pole pak nazýváme **homogenní gravitační pole.**

Pohyby těles obvykle vztahujeme k zemskému povrchu, který považujeme za inerciální vztažnou soustavu. Ve skutečnosti však povrch Země tvoří s ohledem na rotaci Země kolem své osy neinerciální vztažnou soustavu (se stálou úhlovou rychlostí $\omega = \frac{2\pi}{T}$, kde T je doba jednoho otočení Země). V této neinerciální vztažné soustavě působí na všechna tělesa při povrchu Země, která neleží na ose otáčení, kromě gravitační síly $\boldsymbol{F_g}$, směřující do gravitačního středu, ještě setrvačná odstředivá síla $\boldsymbol{F_s}$, směřující kolmo od osy otáčení. Výslednice obou sil je **tíhová síla $\boldsymbol{F_G}$.**
Tíhová síla je vektorovým součtem gravitační síly $\boldsymbol{F_g}$ a setrvačné odstředivé síly $\boldsymbol{F_s}$.

Tedy $\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_s$. Prostor při povrchu Země, v němž se projevují účinky tíhové síly, nazýváme **tíhové pole**.





2. Intenzita gravitačního pole ($\vec{K}$, K)

je vektorová veličina, kterou používáme k popisu gravitačního pole.

je definována rovnicí $\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m}$

a má jednotku $[K] = \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$

velikost intenzity $|\vec{K}|$: $K = \frac{F_g}{m} = \kappa \frac{M\,m}{r^2\,m} = \kappa \frac{M}{r^2}$

směr intenzity $\vec{K}$ - tečna k siločarám gravitačního pole - srovnejte s výše uvedenými modely polí

3. Gravitační zrychlení ($\vec{a}_g$, a_g)

Můžeme porovnat definovanou rovnici s 2. Newtonovým zákonem:

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m} \qquad \vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{F}_g = m\,\vec{K} \qquad \vec{F}_g = m\,\vec{a}_g$$

Z toho vyplývá rovnost $K = a_g$, tedy velikost gravitačního zrychlení udělené tělesu dané hmotnosti v daném bodě gravitačního pole je rovno velikosti intenzity gravitačního pole v témže bodě.

Nyní zkontrolujeme jednotky. Jednotkou intenzity K je $N \cdot kg^{-1}$, ale jednotka zrychlení je $m \cdot s^{-2}$.

$$N \cdot kg^{-1} = \frac{N}{kg} = \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2}}{kg} = m \cdot s^{-2}$$ to znamená, že jednotky jsou si rovny

Jak velké je zrychlení na povrchu Země a jaké při větší vzdálenosti od Země?

(velikost) $a_{g0} = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} \cong 9{,}83\ m \cdot s^{-2}$ na povrchu Země

(velikost) $a_{gh} = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}$ pro bod, vzdálený h metrů od povrchu Země

Gravitační zrychlení a_g používáme v centrálním gravitačním poli, jeho hodnota je závislá na místě, ve kterém ho určujeme. **Tíhové zrychlení g** je vektorový součet gravitačního a odstředivého zrychlení a souvisí s tíhovou silou $F_G = mg$. Má různou hodnotu pro různá místa na Zemi (viz dynamika), dohodou bylo zavedeno normální tíhové zrychlení g_n= 9,80665 $m \cdot s^{-2}$, kterou často zaokrouhlujeme na 10 $m \cdot s^{-2}$.

4. Gravitační potenciál φ

je další veličina, kterou používáme k popisu gravitačního pole, je to skalár

$$\varphi = \frac{W}{m} = \frac{E_p}{m}$$

φ ... gravitační potenciál v daném místě gravitačního pole
m ... hmotnost tělesa umístěného v gravitačním poli
W... práce, kterou potřebujeme k posunutí tělesa z daného místa
na nulovou hladinu gravitačního potenciálu
E_p ... potenciální energie v daném místě

$[\varphi] = J \cdot kg^{-1}$

<u>ekvipotenciální hladiny</u> jsou místa se stejným potenciálem (roviny a kulové plochy,…)
jsou vždy kolmé k siločarám gravitačního pole

nakresli typy polí se siločarami, ekvipotenciálními hladinami a vektory intenzity gravitačního pole

radiální pole **homogenní pole**

Slunce: hmotnost= 2×10^{30} kg, vzdálenost středů: Slunce – Země: 1 AU =150×10^{6} km
Země: hmotnost = 6×10^{24} kg, poloměr = 6 378 km
Měsíc: hmotnost = $7{,}4\times10^{22}$ kg, poloměr =1 700 km, vzdálenost středů: Měsíc – Země = $3{,}8\times10^{8}$ m

Otázky:

3. Na astronauta o hmotnosti 75 kg působí v těžišti síla126 N. Vypočítejte hodnotu intenzity na povrchu Měsíce.

4. Hodnota K na zemském povrchu je kolem 10 N·kg^{-1}. Stanovte hodnotu intenzity ve výšce h nad povrchem Země, jestliže platí a) $h = R_Z$ b) $h = 3R_Z$

5. Určete gravitační zrychlení, působící na Měsíci vlivem působení Země.

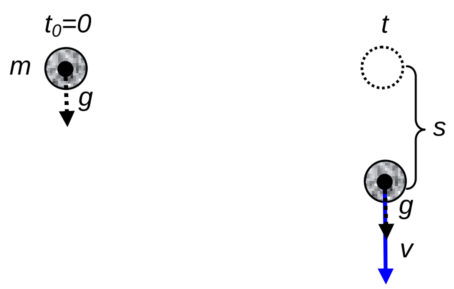
6. Vypočítejte hodnotu zrychlení na povrchu Měsíce.

L2/217,219,220-1, 223-4

5. Pohyby v homogenním tíhovém poli Země

a) <u>volný pád</u> (opakování)

- ve ....
- v tíhovém poli, blízko povrchu ZEMĚ
  $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$ = 9,81 m·s^{-2} = 10 m·s^{-2}
- z .... ($v_0=0$)



Dráha volně padajícího tělesa:
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}gt^2$
Rychlost padajícího tělesa: $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + \mathrm{a}t = gt$

TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

b) <u>**vrhy**</u>

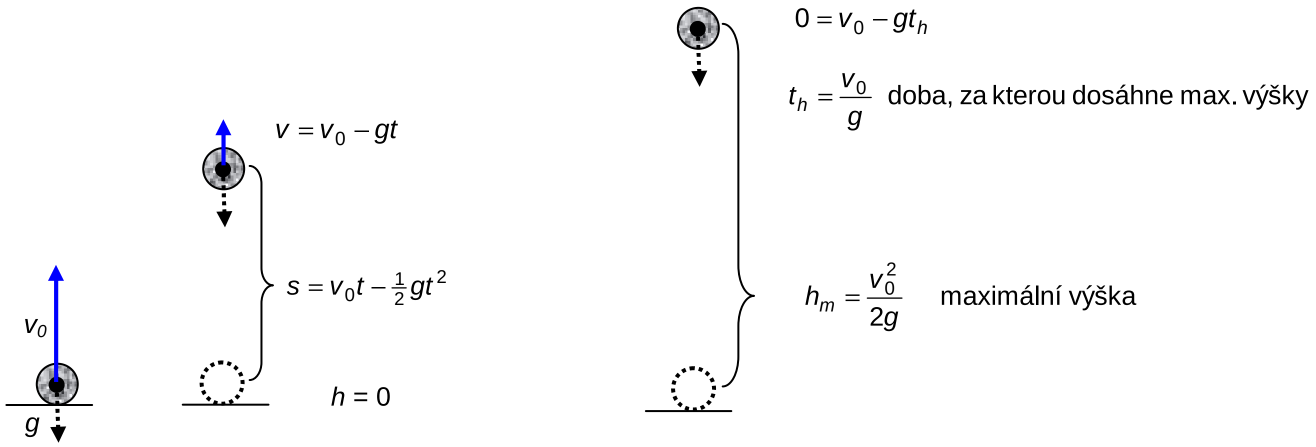
= volný pád (směr $\downarrow$) + rovnoměrný přímočarý pohyb (směr $\vec{v}_0$)

- ve vakuu
- ***a* = *g***
- s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v_0} \neq 0$

i) svislý vrh

svislý pohyb vzhůru je rovnoměrně zpomalený pohyb, pohyb směrem dolů je volný pád

$t_0 = 0$ t (libov.čas při pohybu vzhůru) $t = t_h$ (těleso se zastaví v max. výšce)



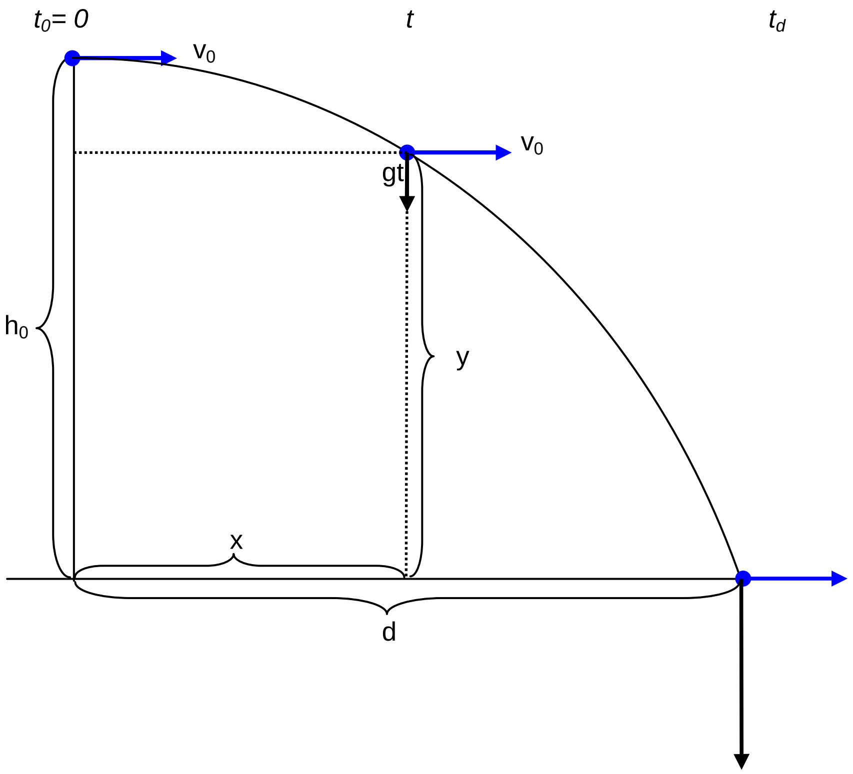
Otázky:

7. Těleso se pohybuje svisle nahoru rychlostí 40 $m \cdot s^{-1}$. Vypočítejte rychlost a vzdálenost v čase 2 sekundy od začátku pohybu. Určete maximální výšku a dobu výstupu. Vypočítejte rychlost dopadu a vzdálenost, do které dopadne na zem. Narýsujte grafy závislosti rychlosti na čase a okamžité rychlosti na čase, najděte rozdíly a diskutujte o nich.

L2/231-6, X237

ii) vodorovný vrh

skládá se ze dvou typů pohybu: rovnoměrný pohyb ve směru počáteční rychlosti a volný pád



t (libovolný čas pohybu)

$$y = h_0 - s = h_0 - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad x = v_0 t \qquad v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} \quad \tan\alpha = \frac{gt}{v_0}$$

t_d (čas dopadu)

$$h_0 = \frac{1}{2} g t_d^2 \quad \Rightarrow \quad t_d = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

$$d = v_0 t_d = v_0 \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \qquad v = \sqrt{v_0^2 + (g t_d)^2} \qquad \tan\alpha = \frac{g t_d}{v_0}$$

Otázky:

8. Výrobci automobilů testují odolnost aut testem na principu vodorovného vrhu. Auto, jedoucí po vodorovné rovině ve výšce 15 m rychlostí 20 m·s^{-1} , spadne z roviny na betonový povrch. Určete úhel dopadu, rychlost dopadu a vzdálenost na betonovém povrch, kam dopadne.

9. Těleso je vyhozeno z helikoptéry ve výšce 55 m od povrchu Země.
   a) Jakou dobu bude padat a jakou rychlostí dopadne, je-li helikoptéra v okamžiku vyhození tělesa v klidu?
   b) Jakou dobu bude padat a jakou rychlostí dopadne, klesá-li helikoptéra v okamžiku vyhození tělesa rychlostí 1 m·s^{-1}? Dosazujte g = 9,81 m·s^{-2}. Výsledek uveďte s přesností na dvě desetinná

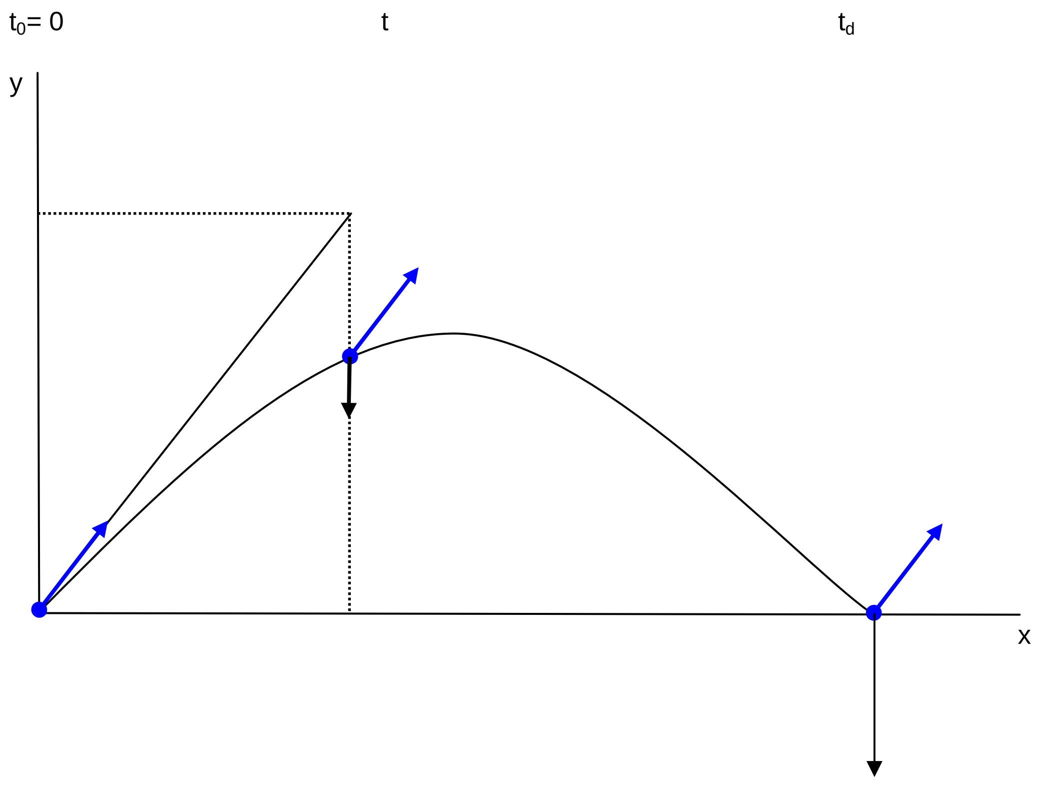
místa.

10. Těleso je vypuštěno z letadla letícího vodorovně stálou rychlostí 150 m·s^{-1} ve výšce 800 m. Neuvažujte odpor vzduchu a berte g = 10 m·s^{-2} . Zjistěte: a) za jak dlouho těleso dopadne na zem b) vodorovnou vzdálenost, kterou urazí těleso od opuštění letadla do dopadu na zem

11. Šíp o hmotnosti 10 g byl vystřelen vodorovně z věže vysoké 80 m rychlostí 25 m·s^{-1} . a) Do jaké vzdálenosti od paty věže dopadne na povrchu Země a jak dlouho bude padat? b) Jaká bude jeho kinetická a potenciální energie na začátku pohybu? c) Jaká bude celková mechanická energie během pohybu?

L2/238-242

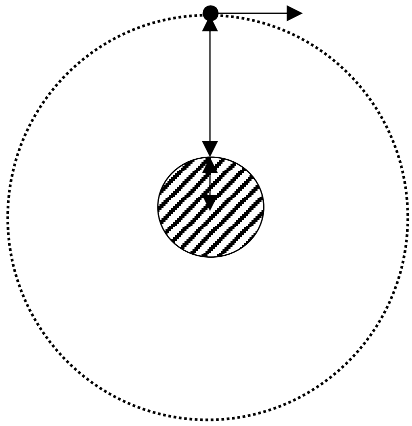
iii) šikmý vrh



Otázky:

12. Fotbalista kopl míč pod úhlem 45°. Balón dopadne na zem ve vzdálenosti 40 m od místa výkopu. Jak velkou rychlost fotbalista udělil míči?

6. Pohyby těles v centrálním gravitačním poli Země – umělé družice



- kruhová trajektorie – rovnoměrný pohyb po kružnici
- dostředivá síla = gravitační síla

$$F_d = F_g$$

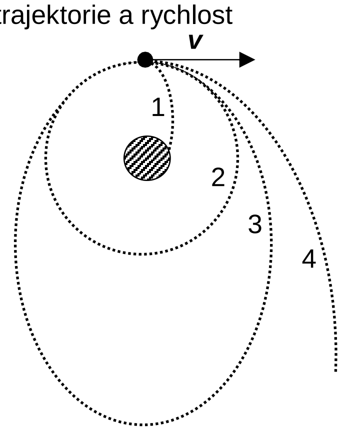
$$m\frac{v_k^2}{r} = \kappa\frac{mM_Z}{r^2}$$

$$v_k = \sqrt{\kappa\frac{M_Z}{r}} = \sqrt{\kappa\frac{M_Z}{R_Z + h}} \qquad h \uparrow \Rightarrow v_k \downarrow$$

Otázky:

13. Vypočítejte kruhovou rychlost pro výšku $h \ll R_Z$ (např. 20 km)
(1. kosmická rychlost, 2. kosmická rychlost je pro opuštění gravitačního pole Země – těleso se stane oběžnicí kolem Slunce, je to $\sqrt{2}v_k$).

trajektorie a rychlost



1. $v < v_k$ část elipsy
2. $v = v_k$ kruh
3. $v_k < v < \sqrt{2}v_k$ elipsa
4. $v = \sqrt{2}v_c$ hyperbola
5. $v > \sqrt{2}v_c$ parabola –
těleso zůstává v gravitačním poli Slunce

Otázky:

14. Vypočítejte výšku geostacionární družice.

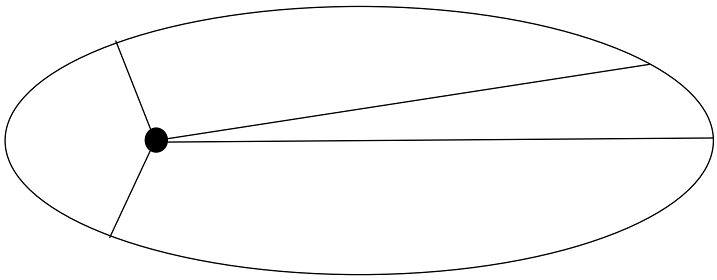
L2/246-252, 254, 256-7

7. Pohyb těles v gravitačním poli Slunce

Keplerovy zákony (1473-1543)

1. Všechny planety se pohybují po elipsách, v jejichž společném ohnisku je Slunce
   (Trajektorie jsou málo odlišné od kružnic)

2. Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní. ($\Rightarrow$ blíže - rychleji)



3. Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin délek hlavních poloos jejich trajektorií.

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

oběžná doba a hlavní poloosa např. Merkuru

to stejné např. pro Venuši (Zemi, Jupiter,…)

Keplerovy zákony platí pro dva libovolné objekty v jednom centrálním gravitačním poli.

Dokažte 3. Keplerův zákon pomocí Newtonova gravitačního zákona.

TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Doplňte následující tabulku s použitím různých zdrojů:

planeta	vzdálenost m	perioda s	$\frac{T^2}{r^3}$
Merkur			
Venuše			
Země			
Mars			
Jupiter			
Saturn			
Uran			
Neptun			

8. Sluneční soustava

stáří zhruba ....miliard let

Slunce

představuje .... % hmotnosti Sluneční soustavy, to je asi .... hmotností Země

teplota na povrchu

teplota ve středu

struktura

Vnitřní planety

Merkur

Venuše

Země

Mars

Pásmo asteroidů

Vnější planety

Jupiter

Saturn

Uran

Neptun

Komety

jádro

koma

ohon

Odpovědi:
1. 2×10^{20} N
2. a) 5×10^{-6} N b) 8×10^{-5} N
3. 1,68 $N\cdot kg^{-1}$
4. a) 2,5 $N\cdot kg^{-1}$ b) 0,625 $N\cdot kg^{-1}$
5. $2{,}7\times10^{-3}$ $m\cdot s^{-2}$
6. 1,7 $m.s^{-2}$
7. a) 20 $m\cdot s^{-1}$, 60 m b) 80 m, 4 s, 8 s
8. 41°, 26,46 $m\cdot s^{-1}$, 34,64 m
9. a) 3,35 s; 32,85 $m\cdot s^{-1}$ b) 3,25 s; 32,86 $m\cdot s^{-1}$
10. a) 12,65 s b) 1897 m
11. a) 4 s, 100 m b) 3,1 J; 7,9 J c) 11 J
12. 20 $m\cdot s^{-1}$
13. 7,9 $km\cdot s^{-1}$
14. 36 000 km

TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY